J. Basic Appl. Sci. Vol. 25, I (1) June 2026. Ar. 10-18
مجلة العلوم الأساسية والتطبيقية
Journal of Basic and Applied Sciences
https://ba.lafsrj.ly/
الهيئة الليبية للبحث العلمي
Libyan Authority for Scientific Research

دالة جرين وتطبيقاتها

هناء أبودية[1*]، مروة العومري[2]

[1]قسم رياضيات، كلية التربية يفرن، جامعة الزنتان.

[2] قسم العام، كلية تقنية الحاسوب، طرابلس، التعليم التقني والفني، ليبيا

المستخلص: في هذا البحث، قمنا بدراسة مفهوم دالة جرين واستخدامها في حل المعادلات التفاضلية، ونسلط الضوء في هذه الدراسة على بعض تطبيقات دوال جرين في العلوم التطبيقية لإبراز أهميتها، حيث تسهم بشكل كبير في تبسيط عملية إيجاد حلول دقيقة وواضحة للمسائل، لاسيما في مشكلة الحدود والقيمة الأولية ومعادلة الموجة ومعادلة الانتشار، وأيضاً معادلات لابلاس وبواسون.

سجل المقال:
أستلم: 2025/11/18م
قبل للنشر: 2026/01/22م

الكلمات المفتاحية:
دالة جرين:
معادلة الانتشار
معادلات بواسون:
معادلة شرودنجر:
معادلات لابلاس:

Green's Function and Its Applications

Hana Aboudia, and Marwa Al-Omari

Abstract: In this research, we studied the concept of Green's function and its use in solving differential equations. In this study, we highlight some applications of Green's functions in applied sciences to emphasize their importance, as they significantly contribute to simplifying the process of finding precise and clear solutions to problems, particularly in boundary value and initial value problems, the wave equation, the diffusion equation, as well as Laplace's and Poisson's equations.

Keywords:
Green's function;
Diffusion equation;
Poisson's equations;
Schrödinger equation;
Laplace's equations;

1. المقدمة:

دالة جرين دالة رياضية قدمها جورج جرين في الفترة (1793 _ 1841م)، جورج جرين عالم الفيزياء والرياضيات بريطاني نشر في عام 1828م مقالاً عن تطبيق التحليل الرياضي لنظرية الكهرباء والمغناطيسية في الفيزياء الرياضية، وقدم في المقال العديد من المفاهيم المهمة من بينها نظرية جرين ومفهوم دوال جرين.

تُعد دالة جرين أداة رياضية محورية في تحليل وحل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية في أبعاد مختلفة ولحل المشكلات المعتمدة على الزمن والمستقلة عنه. تهدف هذه الدراسة إلي تسليط الضوء على أهمية تطبيقات دالة جرين من خلال استعراض خصائصها واستكشاف قدرتها على تبسيط الحلول لمسائل معقدة و إيجاد حلول دقيقة لمجموعة من المعادلات الأساسية مثل معادلة الموجة و معادلة الانتشار و معادلات لابلاس و بواسون بالإضافة إلي معادلتي جاكوبي و شرودنجر.

2. تعريف [1] [2]:

نفرض المعادلة التفاضلية التالية في الفترة $[a, b]$

* قسم الرياضيات، كلية االتربية- يفرن، جامعة الزنتان hana_abudayay@uoz.edu.ly

The Author(s) 2026. Open Access. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY). http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

$$ly = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث $p_1(x),\ p_2(x),\ r(x)$ تكون متصلة وقابلة للتفاضل على (a, b)

تستخدم طريقة تغير المعادلات للحصول على الحل الخاص لـ $ly = r(x)$ على (a, b)

إذا قمنا بتعويض $y = r_1y_1 + r_2y_2$ في المعادلة $r_1y_1 + r_2y_2 = 0$

نحصل على:

$$v_1 = \int \frac{-y_2 r(x)}{w(y_1, y_2)} dx \quad , \qquad v_2 = \int \frac{y_1 r(x)}{w(y_1, y_1)} dx$$

أو

$$y_{(p)} = y_1 \int \frac{-y_2 r(x)}{w(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{w(y_1, y_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث أن v_1 و v_2 تمثل الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة ly =0 على الفترة (a, b)

إذا قمنا بتكامل محدود في التكامل الأول من b إلى x والتكامل الثاني من a إلى x ويمكن تغيير حدود التكامل (b, x) إلى $(x, , a)$ وإذا قمنا بتغيير الإشارة من هنا نحصل على

$$y_{(p)} = \int_a^x \frac{y_1(X) y_2(x)}{w(x)} r(x) dX + \int_x^b \frac{y_1(x) y_2(X)}{w(x)} r(X) dX \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

فإذا عرفنا

$$g(x, X) = \begin{cases} \dfrac{y_1(X)\ y_2(x)}{w(X)} & a < X < x \\[2ex] \dfrac{y_1(x)\ y_2(X)}{w(X)} & x < X < b \end{cases}$$

فإن المعادلة (3) تكون

$$y_{(p)}(x) = \int_a^b g(x, X) r(X) d(X)$$

الحل العام لـ $ly = r(x)$ على (a, b) يكون

$$y = y_{(p)} + y_{(h)} = \int_a^b g(x, X) r(x) dX + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

فإن $g(x, \mathrm{X})$ التي تم تحديدها من خلال هذا التحليل تسمى بدالة جرين.

1.2. خواص دوال جرين [3] [10]:

1.1.2. الدالة $g(x, \mathrm{X})$ وتكون متصلة لكل x (من ضمنها $x = X$).

2.1.2. مشتقة $g(x, \mathrm{X})$ وبالنسبة لـ x تكون متصلة لكل $x \neq X$

$$g`(x,X^{-}) = \lim_{X \to x^{-}} \frac{cos(k_x).sin\big(k(L.x)\big)}{sin(kl)}$$

$$g`(x,X^{+}) = \lim_{X \to x^{+}} \frac{sin(k_x).cos\big(k(L.x)\big)}{sin(kl)}$$

3.1.2. دالة جرين تحقق الشروط الحدية للعلاقة

$$g(x,0) = 0 \ , \ g(x,l) = 0$$

لذا فإن:

$$g(x,0) = g(x,l)$$

-1 دالة جرين متماثلة للمتغيرين $x, \mathrm{X}`$ أي أن

$$g(x,X) = g(\mathrm{X},x)$$

3. تطبيقات دالة جرين [2] [5] [7] [8]:

2.3. دالة جرين لمعادلة الموجة المستقلة عن الزمن.

في هذا القسم سنركز على حساب دوال جرين لمعادلة الموجة المستقلة عن الزمن في بعد واحد وبعدين وثلاثة أبعاد الحل على كل الفضاء ودالة جرين ليست مقيدة بشروط حدية، لذلك يشار إليها باسم دالة جرين في الفضاء الحر.

1.1.3. دالة جرين ذات بعد واحد (أحادية البعد)

معادلة الموجة غير متجانسة:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x} + k^2\right) u(x,k) = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

حيث k ثابت و $x\epsilon(-\infty,\infty)$ ووفقاً للشروط الحدية

$$u(x,k) = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial x} u(x,k) = 0$$

من تعريف دالة جرين فإن حل المعادلة التي تم الحصول عليها عن طريق استبدال حد المصدر بدالة دلتا التي تمثل مصدر نقطة عند x_0 مما يعطي المعادلة

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right) g\ (x \backslash x_0, k) = \delta(x - x_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

بضرب المعادلة (4) في g وضرب المعادلة (5) في u ثم طرح النتيجتين وبالتكامل نتحصل على

$$u(x_0,k) = \int_{-\infty}^{\infty} f\ (x)\ g(x \backslash x_0, k) dx$$

بشرط أن تكون u و $\frac{\partial u}{\partial x}$ صفر عند $x = \pm\infty$

هذا الحل لا قيمة له بدون استخدام دالة جرين والتي يتم إعطاؤها بواسطة حل المعادلة

$$\left(\frac{\partial^2}{dx^2} + k^2\right) g(x \backslash x_0, k) = -\delta(x - x_0)$$

$$g(x\backslash x_0, k) = 0 \;\; , \quad \frac{\partial}{\partial x} g\big(x\backslash x_{0,k}\big) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \; (6)$$

الحل لهذه المعادلة يعتمد على استخدام خواص تحويلات فورية وكتابة $X = |x - x_0|$ ونعبر عن δ, g كتحويلات فورية أي أن

$$g(X, k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(u, k) exp(iuX) du \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \; (7)$$

$$\delta(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} exp(iuX) du$$

بتعويض هذه الصيغ في المعادلة (6) نتحصل على

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-u^2 + k^2)\; G(u, k)\; exp(iuX) du = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} exp(iuX) du$$

من هنا يتبين أن

$$G(u. k) = \frac{1}{u^2 - k^2}$$

عند تعويض هذه النتيجة في المعادلة (7) نحصل على

$$g(X, k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp(iuX)}{u^2 - k^2} du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp(iuX)}{(u - k)(u + k)} du$$

بالتالي فإن المشكلة تنحصر في التكامل المذكور أعلاه، ويمكن القيام بذلك باستخدام صيغة كوشي للتكامل، ومن هنا فإن دالة جرين تعطى بالصيغة التالية

$$g(X, k) = 2\pi i \left(\frac{e^{ikX}}{4\pi k} - \frac{e^{-ikX}}{4\pi k}\right) = \frac{-\sin(kx)}{k}$$

2.1.3. دالة جرين ثنائية الأبعاد:

في بعدين يمكن استخدام نفس الطريقة للحصول على دالة جرين لحل المعادلة

$$(\nabla^2 + k^2) g(\vec{r}\backslash\overrightarrow{r_0}, k) = -\delta^2(\vec{r} - r_0)$$

مع مراعاة بعض الشروط الحدية عند $\overrightarrow{|r|} = \infty$ حيث $\vec{r}_0 \in R^2$, $\vec{r} \epsilon R^2$

وبالتالي يمكن كتابة دالة جرين

$$g(R, k) = \frac{i}{4\pi}\int_0^{\pi} exp(ikR \cos\theta) d\theta$$

كتابة دالة جرين بهذا الشكل يسمح لنا باستخدام النتيجة

$$H_0(kR) \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} exp(ikR \cos\theta) d\theta$$

حيث H_0 هي دالة هانكل (من النوع الأول والدرجة صفر)

3.1.3. دالة جرين في ثلاثة أبعاد:

في ثلاثة أبعاد تعطي دالة جرين للفضاء الحر لحل المعادلة

$$(\nabla^2 + k^2)g(\vec{r} \,/\, \vec{r}_0, k) = -\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

مع مراعاة بعض الشروط الحدودية عند $|\vec{r}| = \infty$

حيث $\vec{r}, \vec{r}_0 \in R^3$

وبالتالي يمكن كتابة دالة جرين بالشكل الآتي

$$g(\vec{r}/\vec{r}_0\,, k) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} exp(ik|\vec{r} - \vec{r}_0|)$$

2.3. حل دالة جرين لمعادلة الانتشار:

1.2.3. معادلة الانتشار المتجانسة:

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = a\frac{\partial}{\partial t}u(\bar{r}, t)$$

حيث a يختلف في العديد من الجوانب عن معادلة الموجه القياسية، وتبين دوال جرين هذه الاختلافات، وتتميز معادلة الانتشار بعدم التماثل فيما يتعلق بالزمن بالنسبة لمعادلة الموجه إذا كانت $u(\vec{r}, t)$ حلاً فإن $u(\vec{r}, -t)$ تكون كذلك حلاً، ومع ذلك إذا كانت $u(\vec{r}, t)$ حلاً لـ

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = a\frac{\partial}{\partial t}u(\bar{r}, t)$$

فإن الدالة $u(\vec{r}, -t)$ حل لمعادلة مختلفة تماماً

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = a\frac{\partial}{\partial t}u(\bar{r}, -t)$$

ولذلك، على خلاف معادلة الموجه، فإن معادلة الانتشار تتميز بين الماضي والمستقبل، وذلك لأن المجال المنتشر u يمثل بعض خصائص المتوسط لمجموعة من الجسيمات العديدة التي لا يمكنها عموماً العودة إلى حالتها الأصلية، لذا يجب أن يؤخذ في الاعتبار السببية في حل معادلة الانتشار، وهذا يؤدي بدوره إلى استخدام تحويل لابلاس لحل المعادلة بالنسبة إلى t (مقارنة بتحويل فوريه المستخدم لحل معادلة الموجه بالنسبة إلى t).

2.2.3. الحل العام لمعادلة الانتشار غير المتجانسة:

في حالة ثلاثة أبعاد لنفترض أن الحل العام للمعادلة

$$\left(\nabla^2 - a\frac{\partial}{\partial t}\right)u(\vec{r}, t) = -f(\vec{r} - t)$$

حيث f هو مصدر دالة لمجموعة متراصة $(\vec{r} \in v)$ ونعرف دالة جرين كحل للمعادلة

$$\left(\nabla^2 - a\frac{\partial}{\partial t}\right)G(\vec{r} \setminus \overrightarrow{r_0}, t - t_0) = \delta^3(\vec{r} - \overrightarrow{r_0})\delta(t - t_0)$$

من المناسب أولاً اجراء تحويل لابلاس لهذه المعادلة بالنسبة إلى $\tau = t - t_0$

$$\nabla^2\, \bar{U} - a(-u_0 + p\,\bar{U}) = -\bar{f} \quad \ldots \quad (8)$$

$$\nabla^2 \bar{G} + a(-G_0 + p\bar{G}) = -\delta^3 \quad \ldots \quad (9)$$

حيث

$$\cup(\vec{r},p)=\int_0^{\infty}u(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\tau)exp(-p\tau)d\tau$$

$$G(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,p)=\int_0^{\infty}G(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\tau)exp(-p\tau)d\tau$$

$$\bar{f}(\vec{r},p)=\int_0^{\infty}f(\vec{r},\tau)exp(-p\tau)d\tau$$

$$u_0=u(\vec{r},t=0)=0 \quad , \quad G_0=G(\vec{r}\setminus r_0,t=0)=0$$

بضرب المعادلة (8) في $\vec{G}$ والمعادلة (9) في $\overline{\mathrm{U}}$ وطرح النتيجتين والتكامل نحصل على:

$$\int_v(\bar{G}\nabla^2\,\bar{\mathrm{U}}-\bar{\mathrm{U}}\,\nabla^2\bar{G})d^3\vec{r}+a\int_v u_0\bar{G}d^3\vec{r}=-\int_v f\bar{G}d^3\vec{r}+\bar{\mathrm{U}}\,(\vec{r}_0,p)$$

باستخدام نظرية جرين وإعادة ترتيب النتيجة نحصل على:

$$\bar{\mathrm{U}}\,(\vec{r}_0,\tau)=\int_v f(\vec{r},p)\bar{G}(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,p)d^2\vec{r}+a\int_v u_0(\vec{r})\,\bar{G}(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,p)d^3\vec{r}+\oint_s\bar{g}\nabla\,\bar{\mathrm{U}}-\bar{\mathrm{U}}\,\nabla\bar{g}).\bar{n}d^2\vec{r}$$

أخيراً، إجراء تحويل لابلاس العكسي واستخدام نظرية الالتفاف لتحويلات لابلاس نصل إلى:

$$\nabla^2u=0$$

$$\nabla^2u=-f \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(10)$$

$$\bar{\mathrm{U}}\,(\vec{r}_0,\tau)=\int_0^t\int_v f(\vec{r},\tau)\bar{G}(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\tau-\grave{\tau})d^3\vec{r}\grave{\tau}+a\int_v u_0(\vec{r})\,\bar{G}(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\tau)d^3\vec{r}$$
$$+\int_0^t\oint_s[G(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\grave{t})\nabla u(\vec{r},t-\grave{\tau})-u(\vec{r},\grave{\tau})\nabla G(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\tau-\grave{\tau})].\bar{n}d^2\vec{r}d\grave{\tau}$$

3.3. حل معادلة جرين لمعادلات لابلاس وبواسون:

تكون معادلة لابلاس وبواسون ثنائية وثلاثية الأبعاد كالآتي:

على التوالي نأخذ أولاً معادلة بواسون، الأسلوب العام للحل متطابق مع الأسلوب المستخدم عند استخراج حل معادلة هلمهولتز غير المتجانسة، وفي حالة ثلاثة أبعاد وتحديد دالة جرين ليكون الحل

$$\nabla^2g(\vec{r}/\vec{r}_0)=-\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

ومن المعادلة (10) نحصل على النتيجة التالية:

$$u=\oint_s(g\nabla u-u\nabla g).\bar{n}d^2\vec{r}+\int gfd^3\vec{r}$$

حيث استخدمنا نظرية جرين للحصول على التكامل السطحي على الجانب الأيمن، المطلوب الآن هو إيجاد دالة جرين لهذه المشكلة، من الواضح بما أن حل المعادلة

$$(\nabla^2+k^2)g=-\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

يكون

$$g(\vec{r}|\vec{r}_0,k) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}exp(ik|\vec{r}-\vec{r}_0|)$$

نتوقع أن تكون دالة جرين لمعادلة بواسون ثلاثية الأبعاد (ومعادلة لابلاس) تكون على الصياغة الآتية:

$$g(\vec{r}|\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

بالتالي نحصل على النتيجة الأساسية التالية

$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi R}\right) = -\delta^3(\vec{R})$$

مع وجود شروط حدودية متجانسة يكون حل معادلة بواسون هو

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{f(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}d^3\vec{r}$$

في بعدين يكون الحل من نفس الصيغة ولكن مع دالة جرين يعطي كالآتي:

$$g(\vec{r}|\vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi}ln(|\vec{r}-\vec{r}_0|)$$

الحل العام لمعادلة لابلاس يكون

$$u = \oint_s (g\nabla u - u\nabla g).\bar{n}d^2\vec{r}$$

حيث g تعطي كما في المعادلة (11)

4.3. حل معادلة جاكوبي التفاضلية بدلالة دالة جرين:

من الواضح أن دالة جرين تحقق معادلة جاكوبي التفاضلية غير المتجانسة التالية

$$LG\ (x, x_0) = \delta(x - x_0)$$

حيث L هو مؤثر جاكوبي التفاضلي المعرف كالآتي

$$L = (1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} + [2(\beta - \alpha) - 2(\alpha + \beta + 1)x]\frac{d}{dx} + \mu(\mu + 2\alpha + 2\beta + 1)$$

حيث:

$$2\beta > -1 \ , \ 2\alpha > -1$$

الحلان الخطيان المستقلان للمعادلة التفاضلية المتجانسة هما $p_\mu^{(2\alpha,2\beta)}(x)$, $Q_\mu^{(2\alpha,2\beta)}(x)$

باستخدام طريقة ستورم ليوفيل لحساب دالة جرين المرافقة لمعادلة جاكوبي التفاضلية نحصل على

$$G\left(x, x^{`}\right)= 2^{-2(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+2\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\mu+2\alpha+1)\Gamma(\mu+2\beta+1)} P_{\mu}^{(3\alpha, 2\beta)}(x) Q_{\mu}^{(2\alpha, 2\beta)}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

حيث:

$$x_{>} = max\left(x, x_0\right)$$

$$x_{<} = min\left(x, x_0\right)$$

مع العلم أن دالة جاكوبي لها الصورة التكاملية التالية

$$2^{-n} \frac{\Gamma(v+n+1)\Gamma(2x+2)}{\Gamma(v+m+1)\Gamma(v-m+1)} Q_{v-n}^{(n-m,\ n+m)}(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} exp(-xt)t^{n-1} M_{m,v+\frac{1}{2}}(2t)dt$$

$$2^{-n} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v-m+1)} P_{v-n}^{(n-m,\ n+m)}(x) = (-1)^{v-n+1}\frac{1}{2i}\int_{\infty}^{0} \exp(-xt)t^{n-1} M_{n,v+\frac{1}{2}}(2t)\ dt$$

حيث $W_{\mu,v}(x) M_{\mu,v}(x)$ هي دوال ويتاكرو حيث أن الأولى منتظمة عند نقطة الأصل أما الثانية فهي منتظمة عند ∞

من العبارات السابقة والمعادلة (12) نتحصل على الصيغة الجبرية لدالة جرين على الصورة:

$$G\left(x, x_0\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(v-n+1)\Gamma(v-m+1)}{\Gamma(2v+2)\Gamma(v+n+1)}(-1)^{v-n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\int_{\infty}^{0} \exp(-xt-x_0 t_0)(t t_0) M_{m,v+\frac{1}{2}}(2t) W_{n,v+\frac{1}{2}}(2t)dtd t_0$$

5.3. حل دالة جرين لمعادلة شرودنجر التفاضلية:

بما أن معادلة شرودنجر هي معادلة تصف الحركة الموجبة المرتبطة بحركة الجسيم والمعادلة التي توصل إليها شرودنجر هي :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\psi(r) = \int_0^{\infty} k\left(r, r_0\right)\mu\left(r_0\right)dr_0$$

لتكن $\psi(k,r) = N\,\emptyset(k,r)$ حيث N ثابت معياري و $\emptyset(k,r)$ تحقق

$$\frac{d^2\emptyset(k,r)}{dr^2}+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\emptyset(k,r) = g(r)\ ,\quad \emptyset(k,r) = 0$$

وهذا المعادلة لها الحل

$$\emptyset(k,r) = \int_0^{1} G\left(r, r_0\right) g\left(r_0\right)dr_0$$

حيث $G\left(r, r_0\right)$ دالة جرين تحقق

$$\frac{d^2}{dr^2}G\left(r, r_0\right)+\left(k^2-\frac{L(L+1)}{r^2}\right)G\left(r, r_0\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

ولحل هذه المعادلة نضع $G\left(r, r_0\right) = r\,\emptyset\left(r, r_0\right)$ في المعادلة (13) لنتحصل على :

$$\frac{d^2\emptyset\left(r, r_0\right)}{dr^2}+\frac{2d\,\emptyset\left(r, r_0\right)}{rdr}+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right.\emptyset\left(r, r_0\right) = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

ولو وضعنا $\emptyset\,(r\,,r_0) = r^{-\frac{1}{2}}\,g\,(r\,,r_0)$ في المعادلة (14) يكون لدينا:

$$\frac{d^2 g\,(r\,,\,r_0)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg\,(r\,,r_0)}{dr} + \left(k^2 - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right) g(r,r_0) = 0$$

وهي إحدى صور معادلة بسيل من الدرجة $l + \frac{1}{2}$ وحلها هو

$$g(r\,,r_0) = A\,J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + B\,N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

وحيث

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kr) = \left(\frac{2\,kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} j(kr)$$

$$N_{l+\frac{1}{2}}(kr) = \left(\frac{2kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \eta(kr)$$

من العبارات السابقة نصل إلى الصورة النهائية لدالة جرين لمعادلة شرودنجر التفاضلية

$$G(r\,,r_0) = \begin{cases} Arj(kr) & ; \quad r < r_0 \\ \\ Br\eta(kr) & ; \quad r > r_0 \end{cases}$$

4. النتائج والتوصيات

في هذه الدراسة تم عرض بعض تطبيقات دالة جرين، ونلاحظ من خلال دراستنا أن استخدام دوال جرين لحل معادلة الموجة والانتشار وبواسون تظهر النتائج توفر طرق فعالة لحل المسائل المعقدة، وتنالنا أيضا إيجاد حلول لمعادلة جاكوبي التفاضلية و معادلة شرودنجر التفاضلية، وتبرز الورقة الأهمية العلمية لدوال جرين في تحسين دقة النماذج الرياضية المستخدمة في العلوم التطبيقية، ودالة جرين تعد من الأدوات الأساسية في الرياضيات التطبيقية لتحليل وحل النظم الفيزيائية المعقدة، وقد يكون بحثنا هذا نقطة لانطلاق بحوث أخرى بأفكار جديدة مثل حل معادلة الحركة ونظرية التشتت في ميكانيكا الكم.

5. المراجع:

[1]. Roach, G. 1982. Green's function. Cambridge.

[2]. Duffy, D. 2015. Green's Functions with Applications. CAC Press.

[3]. Carrier, G. Pearson, G. 1976. Partial Differential Equations. New York.

[4]. [4] Olver, P. 2014. Introduction to Partial Differentia Equations. Springer Cham Heidelberg, New York

[5]. Stakgold, I. Holst, M. 2011. Green's Functions and Boundary value problems. John wiley and sons Hobokon.

[6]. Panakhor, E. Yilmazer, R. 2011. On the Determination of the Hydrogen Atom Equation from Two Spectra. World Applied Sciences Journal 13 (10):2203 – 2210.

[7]. Taylor, M. 2006. Wave Equations and Diffraction. In Elsevier Encyclopedie of Mathematical Physics.

[8]. Howe, M. 2003 .Theory of Vortex Sound. Cambridge Texts in Applied Mathematics.

[9]. Linear, B. 2000. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Boston Basel Berlin.

[10]. Asmar, N. 2004. Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. Prentice Hall . New Jersey.